Sunto di geometria pre-interrogazione a cura di Raffaello Curtatone

ALGEBRA LINEARE

ENNUPLA – insieme ordinato di numeri reali.

COMBINAZIONE LINEARE – dati x1,x2,…xn appartenenti ad Rn si dice combinazione lineare di x1,x2,…xn ogni elemento Z appartenente ad Rn per cui esiste y1,y2,…yn appartenenti ad Rn tali che Z=y1x1,y2x2,…ynxn.

Un ennupla si dice linearmente dipendente quando almeno uno dei suoi coefficienti K del sistema omogeneo ammette soluzione diversa da 0.

MATRICE – prospetto di numeri reali disposti in modo da formare righe o colonne.

DETERMINANTE – operatore delle matrici quadrate che dà un numero reale che non dipende dalle linee adoperate per calcolarlo, dà informazione sulla lineare dipendenza delle linee della matrice (det=0 almeno una delle linee è linearmente dipendente), inoltre il determinante della matrice è = a quello della trasposta.

MINORE AGGIUNTO – (-1)^i+j*(M.C.Aij):

MINORE COMPLEMENTARE – il numero ottenuto sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna moltiplicato per il determinante della 2*2 rimanente.

MATRICE SIMMETRICA – quando sono uguali gli elementi opposti della diagonale principale.

MATRICE TRASPOSTA – si cambiano le righe con le colonne.

MATRICE INVERSA – è la matrice A le cui colonne sono formate dagli aggiunti degli elementi delle righe di A divisi per det(A), inoltre A*A^-1=I=A^-1*A se det(A)=0 allora A non ha inversa, nella matrice ortogonale l'inversa è = alla trasposta.

P.S. – la matrice I, detta identica è ortogonale, la matrice ortogonale indica una rotazione.

TEOREMA DI BINET – il determinante di un prodotto è = al prodotto dei determinanti.

RANGO – è il massimo numero di linee linearmente indipendenti, si può fare anche delle matrici rettangolari dove almeno una linea è sicuramente linearmente dipendente, è ottenuto riducendo il sistema a scaletta con Gauss e contando il numero di capi in testa o pivot diversi da 0.

TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI – dato un sistema a*x=b è risolubile se e solo se il rango della matrice incompleta (senza i termini noti) è uguale a quello della completa (con i termini noti).

TEOREMA – p vettori sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le loro coordinate.

SPAZIO VETTORIALE – è quando presi due elementi generici di tale spazio sono verificate le operazioni di somma e prodotto per uno scalare mantenendo le seguenti proprietà:

Somma = associativa, commutativa, elementi neutro e opposto.

Prodotto per uno scalare = distributiva, associativa, elemento neutro.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE – detto H il sottospazio contenuto in V, l'insieme delle operazioni definite in V applicate ad H se danno un risultato che appartiene ancora ad H dirò che è un sottospazio vettoriale.

L'unione di due sottospazi non è detto che sia ancora un sottospazio mentre l'intersezione lo è sempre.

L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale, la sua dimensione è data dal numero di variabili libere del sistema.

APPLICAZIONE LINEARE – lo è quando la somma delle basi è = alla somma delle immagini e quando il prodotto delle basi è = al prodotto delle immagini, per calcolare l'immagine di una funzione, invece di applicare la legge ad ogni singolo elemento scelgo di trovare una base per quell'applicazione e di moltiplicarla per i coefficienti della funzione.

TEOREMA – scelta una base dentro V comunque siano scelti n oggetti esiste una e una sola applicazine lineare tale che le immagini delle basi siano gli oggetti scelti.

KERf o NUCLEO – data un'applicazione da V in W si dice Kerf l'insieme degli elementi tali che f(v)=0.

BASE DI KERf – si risolve il sistema omogeneo (a*x=0) e si trovano gli x diversi da 0 tali che f(x)=0.

IMf o IMMAGINE – data un applicazione da V in W si dice Imf l'insieme degli elementi non nulli tali che f(v)=w.

BASE DI IMf – si riduce il sistema con Gauss e si risolve il sistema in funzione di un x(a*x=x).

TEOREMA DELLE DIMENSIONI – la dimensione di Imf e di Kerf è = alla dimensione dello spazio di partenza.

INIETTIVA – vettori diversi hanno immagini diverse.

SURIJETTIVA – ogni elemento dello spazio di arrivo è immagine di almeno un elemento dello spazio di partenza.

BIJETTIVA – ogni elemento dello spazio di partenza è immagine di un solo elemento dello spazio d'arrivo.

ENDOMORFISMO – applicazione lineare che ha lo spazio di partenza = a quello di arrivo, se inoltre tale applicazione e bijettiva allora si dice ISOMORFISMO di V.

OMOMORFISMO – applicazione lineare che ha lo spazio di partenza diverso da quello di arrivo.

TEOREMA – la molteplicità geometrica è sempre <= a quella algebrica.

EQUAZIONE O POLINOMIO CARATTERISTICA – cambiando la base della matrice non cambia il suo determinante det(A-kI)=det(C-kI)→det(A-kI)=det(M^-1CM-kI)→ = det(M^-1CM-kM^-1M) = det(M^-1(C-kI)M) = (per il teorema di Binet) = det M^-1 * det(C-kI) * det M = det M^-1 * det M * det(C-kI) = det I * det(C-kI) = det(C-kI)

AUTOVALORI – sono i valori di k che trovo risolvendo il sistema indeterminato (A-KI=0) dunque mi limito a svolgere il determinante di (A-KI) il quale risulterà = 0 per determinati valori di k (a me interessano solo le soluzioni reali).

AUTOVETTORI – si ottengono sostituendo alla matrice gli autovalori trovati e risolvendo il sistema (A-KI=0), essi rappresentano uno spazio vettoriale che prende il nome di AUTOSPAZIO con dimensione n-r (e dà la molteplicità geometrica).

SCHEMA

AUTOVALORI	AUTOVETTORI	DIMENSIONE	SONO BASE DI AUTOVETTORI?
1) $k1 \neq k2 \neq k3$	vk1,vk2,vk3	ognuno 1	si, sempre
2)$k1=k2 \neq k3$	vk1,vk3	vk1=1 o 2,vk3=1	solo se dim. vk1=2
3)k1=k2=k3	vk1	vk1=1 o 2 o 3	solo se dim. vk1=3
4)k1	vk1	1	no, mai

TEOREMA – nella matrice simmetrica non esistono soluzioni complesse e la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica, ognuno degli autospazi ha una base e l'insieme delle basi è linearmente indipendente, se coincidono con la dimensione dello spazio di partenza formano una base di autovettori.

DIAGONALIZZAZIONE DELLA MATRICE – geometricamente è una rototraslazione del piano, serve per studiare le figure geometriche con un sistema di riferimento opportuno in modo da semplificare i calcoli. Se la molteplicità algebrica (grado di molteplicità dell'autovalore trovato) non corrisponde con quella geometrica (dimensione dell'autospazio) la matrice non è diagonalizzabile.

GEOMETRIA ANALITICA

SISTEMA DI RIFERIMENTO – siano dati O = un punto nello spazio, B={v1,v2,v3} = una base dello spazio e 3 punti (q1,q2,q3) tali che v1=(q1-0),v2=(q2-0),v3=(q3-0) l'insieme S={0,v1,v2,v3} si dice sistema di riferimento cartesiano nello spazio, se la base è quella CANONICA (ortonormale) si dice che il sistema di riferimento è ORTOGONALE, inoltre risulta che il punto P(3,4,5) ha le coordinate invariate rispetto a tale base poiché essa si comporta da 1 nella moltiplicazione.

SISTEMA DI EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA – (nello spazio)

X1-p1 = t(p1-q1) individua la retta passante per il punto di coordinate
X2-p2 = t(p2-q2) (p1,p2,p3) e parallela al vettore di
X3-p3 = t(p3-q3) coordinate (p1-q1,p2-q2,p3-q3)

Una retta può avere infinite equazioni parametriche.

CONDIZIONI DI PARALLELISMO – (sul piano)

X1 = l1*t + p1 parallela a x1' = l1'*t + p1' $\rightarrow$ l1 = αl1'
X2 = l2*t + p2 parallela a x2' = l2'*t + p2 $\rightarrow$ l2 = αl2'

RETTE NON PARALLELE MA COMPLANARI – occorre che le loro coordinate siano linearmente dipendenti (det=0)

CONDIZIONI DI ORTOGONALITA'– si impone il prodotto scalare delle coordinate delle 2 rette =0 poiché cos(90)=0

P.S. – due rette parallele rendono determinato il sistema omogeneo delle loro coordinate, l'intersezione di due piani genera una retta, tre punti individuano un piano, un punto in comune tra due rette si ottiene risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni cartesiane.

FORMA CARTESIANA – per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana occorre isolare il parametro da 2 equazioni e porre una uguale all'altra.

EQUAZIONE PARAMETRICA DEL PIANO –

X1 - q1 = α (f1 - q1) + β (p1 - q1) a differenza della retta
X2 - q2 = α (f2 - q2) + β (p2 - q2) occorrono 2 parametri
X3 - q3 = α (f3 - q3) + β (p3 - q3) (α e β)

Il piano è individuato dal punto di coordinate (q1,q2,q3) che dà la quota, e i vettori direttori (f1,f2,f3) e (p1,p2,p3).

CONDIZIONI DI INCIDENZA – il sistema omogeneo ottenuto dalle coordinate dei 2 piani ha ∞' soluz. (retta).

CONDIZIONI DI COMPLANARITA' – il sistema omogeneo ottenuto ha ∞'' soluz. (2 rette).

CONDIZIONI DI PARALLELISMO – il sistema è impossibile.

CONDIZIONI DI PERPENDICOLARITA' – il prodotto scalare delle giaciture dei 2 piani deve risultare = 0

EQUAZIONE DEL FASCIO DI PIANI – (che hanno coma sostegno la retta d'intersezione)

λ (ax1 + bx2 + cx3 + d) + μ (αx1 + βx2 + χx3 + δ) = 0 , quando $\lambda=\mu$ il fascio si dice improprio (∞ piani paralleli).

P.S. – un piano è individuato da un vettore ortogonale ad esso (detto vettore giacitura) e un punto per il quale paqssa il piano, inoltre data l'equazione cartesiana del piano: ax+by+cz+d=0 esso è parallelo, supposto a diverso da 0 ai vettori v1=(-b/a,1,0) e v2=(-c/a,0,1) e passa per il punto p(-d/a,0,0).

LUOGHI GEOMETRICI – insieme di punti che soddisfa una determinata legge.

Es. la circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un unico punto detto centro.

PRODOTTO SCALARE DEFINITO POSITIVO – applicazione lineare dello spazio V dei vettori in R.

Esso deve avere le seguenti proprietà:

BILINEARITA' – g(x1+x2,y) = g(x1,y)+g(x2,y) ; g(kx,y) = kg(x,y) , linearità rispetto ad x.
g(x,y1+y2) = g(x,y1)+g(x,y2) ; g(x,ky) = kg(x,y) , linearità rispetto ad y.

Affinché sia bilineare devono essere verificate entrambe le condizioni.

SIMMETRICITA' - f(x,y) = f(y,x)

DEFINITO POSITIVO - f(x,x) >=0 ; f(x,x) = 0 se e solo se x=0

FINE

Si ringraziano per la collaborazione Raveggi Marco, Cecchi Enrico, Salvalai Marco.