Sunto di analisi a cura di Raffaello Curtatone

NUMERI E FUNZIONI

NUMERI NATURALI – N = (0,1,2,3,4,5,…)) gli insiemi (N,Z,Q) sono
NUMERI INTERI - Z = (-3,-2,-1,0,1,2,3,…)) equipotenti o infiniti numerabili.
NUMERI RAZIONALI – Q = $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5},-\frac{1}{12},\frac{2}{3}\right)$)

NUMERI REALI – R = $\left(1,-\frac{3}{2},\sqrt{2},-\sqrt[3]{5},-4,0\right)$ insieme infinito non numerabile (non è possibile mettere in corrispondenza biunivoca i numeri di questo insieme con quelli dell'insieme N).

IRRAZIONALITA' DI RADICE DI 2 – per assurdo $\sqrt{2}$ è razionale, dunque ipotizzo = a due numeri $\frac{p}{q}$ primi tra loro, anche perché se non lo fossero posso ricondurmi al caso in cui lo sono (ad esempio raccogliendo), elevando al quadrato $2q^2 = p^2$, p^2 è divisibile per 2 e confrontando gli sviluppi anche p è divisibile per 2, p=2s, dunque $q^2 = \frac{4s^2}{2} = 2s^2$ e q^2 quindi è divisibile per 2 anche q è divisibile per 2 dunque non sono più primi tra loro, una contraddizione.

INSIEME LIMITATO SUPERIORMENTE – si dice quando un insieme A di numeri reali ammette almeno un numero reale k che non è minore di nessun numero di A, dirò che k è un maggiorante di A (è chiaro che se c'è un maggiorante ce ne sono infiniti in quanto ogni numero > di k è anch'esso maggiorante) il più piccolo dei maggioranti è un numero L detto estremo superiore che non necessariamente appartiene ad A, ne caso ci appartenga L è il massimo di A.

INSIEME LIMITATO INFERIORMENTE – si dice quando esiste almeno un numero h minore di tutti i numeri di A, esso viene detto minorante di A, il più grande dei minoranti è un numero l detto estremo inferiore che non necessariamente appartiene all'insieme A, nel caso ci appartenga dirò che l è il suo minimo.

Estremo superiore = minimo dei maggioranti = sup.
Estremo inferiore = massimo dei minoranti = inf.

ASSIOMA DI CONTINUITA' – ogni sottoinsieme A non vuoto di R limitato superiormente ha estremo superiore, cioè vi è un numero reale b tale che b = sup A.

DISTANZA TRA DUE PUNTI – dati due punti x,y appartenenti ad R la distanza di x da y è il numero d(x,y):=│x-y│ esso risponde alle seguenti proprietà:
1° │x-y│>=0 e │x-y│=0 se e solo se x=y
2° Simmetria │x-y│=│y-x│
3° Disuguaglianza triangolare │x-y│<=│x-z│+│z-y│

INTERVALLO APERTO – dati due numeri reali a,b l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra a e b esclusi si chiama intervallo aperto, si scrive]a,b[.

INTERVALLO CHIUSO – dati due numeri reali a,b l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra a e b inclusi si chiama intervallo chiuso, si scrive [a,b].

FUNZIONE – legge che associa ad ogni valore x appartenente ad A uno ed un solo valore y appartenente a B.

DOMINIO – insieme su cui è definita la funzione.(campo di esistenza)

CODOMINIO – insieme su cui è definita l'immagine della funzione.

FUNZIONE CONTINUA- 1° Continuità in un punto – f(x)→ $f(x_0)$ per x→ x_0, - 2° Continuità in un intervallo – una funzione reale f(x), x ∈ (a,b) si dice continua in (a,b) se è continua in ogni punto di (a,b).

FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE – funzione definita in un intervallo (a,b) dove ∀ (x_1, x_2) appartenenti ad esso si ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, se è strettamente crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

FUNZIONE MONOTONA DECRESCENTE – funzione definita in un intervallo (a,b) dove ∀ (x_1, x_2) appartenenti ad esso si ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, se è strettamente decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Sia f una funzione (legge) che associa ad ogni punto di x uno, e uno solo, punto di y si hanno:

FUNZIONE INIETTIVA – al più un punto di x per ogni y.

FUNZIONE SUIETTIVA – almeno un punto di x per ogni y.

FUNZIONE BIIETTIVA – uno ed un solo punto di x per ogni y.

ASSE CARTESIANO – la posizione di un punto P sulla retta si può rappresentare con un numero reale. Si fissano due punti O detta origine e E_1 detta unità ai quali si assegnano i numeri 0 e ad ogni altro numero P si assegna poi il rapporto delle distanze $\frac{OP}{OE_1}$ con segno positivo se P è dalla stessa parte di E_1 rispetto all'origine O, con segno meno se P è dalla parte opposta.

PIANO CARTESIANO – se si fissano due vettori e_1 e e_2 non allineati con lo stesso punto di applicazione O si può ricostruire la posizione di ogni punto P del piano mediante l'intersezione p_1 tra la retta per OE_1 e la parallela a OE_2 per P e l'intersezione p_2 tra OE_2 e la parallela per P a OE_1, e quindi mediante le coordinate x di p_1 e y di p_2. In genere si usa un riferimento cartesiano ortonormale in cui cioè e_1 e e_2 sono perpendicolari tra di loro, disegnare e_1 in orizzontale orientata verso destra, chiamare ascissa la propria coordinata e indicarla con la lettera x, disegnare e_2 in verticale orientata verso l'alto, chiamare ordinata la propria coordinata e indicarla con la lettera .

SPAZIO CARTESIANO – se si fissano tre vettori e_1, e_2, e_3 non complanari con lo stesso punto di applicazione O. Si può ricostruire la posizione di ogni punto P dello spazio mediante la proiezione di questo su uno dei tre piani individuato dai tre vettori procedendo in modo analogo a quello per individuare un punto nel piano per trovare le prime due coordinate; la terza è data dall'intersezione p_3 tra la retta per OE_3 e il piano parallelo a quello di riferimento comprendente il punto P, quindi mediante le coordinate z di p_3. In genere anche nello spazio si usa un sistema di riferimento ortonormale dove e_1, e_2, e_3 sono perpendicolari tra di loro.

GRAFICO DI UNA FUNZIONE – insieme di punti generati dalle coppie (x,f(x)) sul piano cartesiano.

FUNZIONE PARI – (o simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) è quando f(x) = f(-x).

FUNZIONE DISPARI – (o simmetrica rispetto all'origine) è quando f(x) = -f(-x).

FUNZIONE INVERSA –sia x ∈ A, f(x) ∈ B e f una funzione tale che f: x→f(x)la funzione f^{-1} tale che f^{-1}:(f(x))→x viene detta inversa di f ovvero se f associa ∀ elemento di A uno e un solo elemento di B, la funzione f^{-1} associa ∀ elemento di B uno e uno solo elemento di A, graficamente viene ottenuta ribaltando la funzione rispetto all'asse a 45°, si può invertire solo le funzioni iniettiva(in parte) e biiettiva(totalmente).

FUNZINE COMPOSTA – sia f: x→y e g: y→z, la funzione h: x→z è detta "composta" e si indica anche con h= g(f(x)).

LIMITI DI FUNZIONI

CONCETTO DI LIMITE – data una funzione y=f(x) definita in un intervallo [a,b] si dice che per x→ x_0 la funzione tende ad un limite L se ∀ ε positivo arbitrario qualunque, si può trovare in corrispondenza un intorno di x_0 =] x_0-δ, x_0+δ[tale che per ogni x di esso si abbia |f(x)-L| < ε, si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x)$ = L.

VERIFICA DEL LIMITE – (esempi e definizione matematica)

1° Limite +∞ data una funzione y = f(x) definita in un intervallo [a,b] si dice che per x→ x_0 f(x)→+∞ se ∀M positivo arbitrario, si può trovare in corrispondenza un intorno di x0] x_0-δ, x_0+δ[tale che ∀x di esso, escluso x_0, si abbia f(x)>M, si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x)$ = +∞.

2° Limite –∞ data una funzione y = f(x) definita in un intervallo [a,b] si dice che per x→ x_0 di f(x)→-∞ se ∀M positivo arbitrario, si può trovare in corrispondenza un intorno di x0:] x_0-δ, x_0+δ[tale che ∀ x di esso, escluso x_0, si abbia f(x)<-M, si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x)$ = -∞.

3° Limite a +∞ data una funzione y = f(x) per x che diverge a destra si dice che lim per x→+∞ di f(x) = L se ∀ ε positivo, arbitrario ∃ M>0 tale che ∀ x>M si ha |f(x)-L| < di ε, si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = L.

4° Limite a -∞ data una funzione y = f(x) per x che diverge a sinistra si dice che lim per x→-∞ di f(x) = L se ∀ ε positivo arbitrario ∃ K>0 tale che ∀ x<K si ha |f(x)-L| < di ε, si scrive $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ = L.

5° Limite +∞ per x→+∞ data una funzione y = f(x) per x che diverge a destra si dice che lim per x→+∞ di f(x)→+∞ se ∀ M>0 ∃ K>0 tale che ∀ x>K si ha f(x)>M, si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ = +∞.

6° Limite -∞ per x→-∞ data una funzione y = f(x) per x che diverge a sinistra si dice che lim per x→-∞ di f(x)→-∞ se ∀M>0 ∃ K>0 tale che ∀ x<-K si ha f(x)<-M, si scrive $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ = -∞.

UNICITA’ DEL LIMITE–il limite se esiste è unico, dunque dove esistono il limite sinistro deve essere = a quello destro
LIMITATEZZA – se il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = L allora ∃ un intorno di x_0 in cui la funzione è limitata.

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO – quando si fa tendere la x a x_0^+ è quello destro e a x_0^- è il sinistro.
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO – sia una funzione continua in un intervallo [a,b] con limite L per x→ x_0 positivo(rispettivamente negativo), ∃ un intorno di x_0 in cui la funzione è positiva (rispettivamente negativa).
CRITERIO DEL CONFRONTO – siano f(x) e g(x), x∈ (a,b) due funzioni se g(x)→∞ per x→ x_0, x ∈ (a,b) e g(x) <= f(x) per ogni x dell’intervallo allora f(x)→∞ per x→ x_0.
SOMMA DI LIMITI – la somma di un limite è = al limite della somma; (dimostrazione)
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ = L e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ = M dunque $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$, procediamo con la verifica dei limiti: per f(x) si ha: ∀ ε >0 ∃ δ_1 >0 tale che | x- x_0 | < δ_1 → | f(x)-L | < ε e per g(x): ∀ ε >0 ∃ δ_2 >0 tale che | x- x_0 | < δ_2 → | f(x)-M | < ε e per la somma dei due abbiamo: ∀ ε >0 ∃δ>0 tale che | x- x_0 | <δ→ | f(x)+g(x)-L-M | <2 ε (dove δ è il minimo tra δ_1 e δ_2), per l’arbitrarietà di ε posso prenderlo = $\frac{\varepsilon}{2}$ rispettando le condizioni.
PRODOTTO DI LIMITI - il prodotto di un limite è = al limite del prodotto (se esistono i due limiti).
QUOZIENTE DI LIMITI - il quoziente di un limite è = al limite del quoziente(ammesso che esistono i due limiti e posto il valore del denominatore≠ da 0).
ESPONENZIALE DEL LIMITE - il limite dell’esponenziale è = all’esponenziale del limite.
TEOREMA DEL SANDWICH – sia g(x) una funzione compresa tra f(x) e h(x) ∀ x ∈ (a,b) e il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = L e il $\lim_{x \to x_0} h(x)$ = L, allora il $\lim_{x \to x_0} g(x)$ = L. (dimostrazione) ∀ ε >0 ∃ δ>0 tale che ∀ x appartenente ad (a,b) | f(x)-L | < ε , ∀ ε >0 ∃ δ>0 tale che ∀ x appartenente ad (a,b) | h(x)-L | < ε , quindi L- ε <f(x)<L+ ε e L- ε <h(x)<L+ ε , dunque L- ε <f(x)<g(x)<h(x)<L+ ε allora l- ε <g(x)<l+ ε quindi $|g(x) - L| < \varepsilon$.
QUOZIENTE DI FUNZIONI INFINITESIME – un infinitesimo è un “qualcosa” talmente piccolo da non poter essere afferrato, nel rapporto tra funzioni infinitesime è rilevante per il risultato la funzione infinitesima di ordine superiore, cioè quella che tende a 0 più velocemente.
QUOZIENTE DI FUNZIONI INFINITE –un infinito è un “qualcosa” talmente grande da non poter essere afferrato, nel rapporto tra funzioni infinitesime è rilevante per il risultato la funzione infinita di ordine superiore, cioè quella che tende a ∞ più velocemente.
FORME INDETERMINATE – $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, 0 * \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$, si risolvono con vari metodi applicando di volta in volta quello più opportuno per togliere l’indeterminazione.
LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE – se una funzione f definita in (a,b) è crescente allora il lim x→ b^- di f(x) = sup f(x), x appartenente (a,b[e lim x→ a^+ di f(x) = inf di f(x), x appartenente]a,b); se f è decrescente lim x→ a^+ di f(x) = sup di f(x), x appartenente]a,b) e lim x→ b^- di f(x) = inf di f(x), x appartenente (a,b[.

FUNZIONI CONTINUE

P.S. – una funzione continua trasforma intervalli in intervalli.
CONTINUITA’ A SINISTRA – la funzione è continua alla sinistra di x_0, facendo tendere la x→ x_0^-
CONTINUITA’ A DESTRA – la funzione è continua a destra di x_0, facendo tendere la x→ x_0^+
FUNZIONI DISCONTINUE – sia f una funzione definita in un intervallo(a,b), ma non esiste il limite per x→ x_0, (ad esempio quando il limite destro è ≠ dal sinistro oppure almeno uno dei due non esiste)la funzione non è continua.
DISCONTINUITA’ ELIMINABILI – la funzione in x_0 assume un valore ≠ dal limite di essa per x→ x_0, la discontinuità viene eliminata dando alla funzione un valore opportuno nel punto di discontinuità.
DISCONTINUITA’ DI 1 SPECIE – detta a salto, il limite destro è ≠ dal limite sinistro.(valori finiti)
DISCONTINUITA’ DI 2 SPECIE – uno dei due limiti risulta ∞ o non esiste.
CONTINUITA’ DELLA SOMMA –)
CONTINUITA’ DEL PRODOTTO –) la somma, il prodotto, la differenza e il quoziente(salvo i punti dove il
CONTINUITA’ DELLA DIFFERENZA –)denominatore si annulla) sono ancora funzioni continue per le proprietà del
CONTINUITA’ DEL RAPPORTO -)limite della somma, del prodotto, della differenza e del quoziente.

CONTINUITA' DELLA FUNZIONE COMPOSTA – la composizione di due funzioni continue è una funzione continua nel campo di esistenza comune ad entrambe.
CONTINUITA' DELL'INVERSA – sia f: (a,b)→R una funzione monotona. f è continua in tutti i punti di (a,b) se e solo se f(a,b) è un intervallo. Dunque se f è strettamente monotona e continua, l'immagine (c,d) = f(a,b) è un intervallo. La funzione inversa f^{-1}: (c,d)→(a,b) è monotona, è definita su un intervallo ed ha immagine l'intervallo (a,b). E' quindi continua per quanto detto prima, inoltre se è continua e invertibile in tutti i punti di (a,b) f è strettamente monotona.
SURIETTIVITA' DELLE FUNZIONI CONTINUE – sia f una funzione continua in un intervallo (a,b) con o senza gli estremi, per l'assioma di continuità se f è limitata sicuramente ha inf e sup e se inf<y<sup allora ∃ almeno un x (dunque anche più di uno) per cui si ha f(x) = y dirò che f è suriettiva su]inf f(x),sup f(x)[.
MASSIMI DI UNA FUNZIONE – sia f definita in (a,b) e x_0 un punto di (a,b) tale che ∀ valore di f(x) si ha f(x)≤f(x_0) dirò che x_0 è un massimo della funzione, il massimo relativo è quando $x_0 \geq$ ad un intorno di x0 ⊂ (a,b).
MINIMI DI UNA FUNZIONE – sia f definita in (a,b) e x_0 un punto di (a,b) tale che ∀ valore di f(x) si ha f(x) ≥f(x_0) dirò che x_0 è un minimo della funzione, il minimo relativo è quando $x_0 \leq$ ad un intorno di x_0 ⊂ (a,b).
TEOREMA DEGLI ZERI – sia f(x), x appartenente [a,b] una funzione continua in [a,b] se f(a)*f(b)<0 allora ∃ almeno un punto x_0 appartenente ad [a,b] in cui f(x_0) = 0 (dimostrazione) f(a)*f(b)<0 ⇒ suppongo che f(a)<0 e f(b)>0, indico con E{x appartenenti [a,b] tali che f(x)<0} dunque E è non vuoto (f(a)<0) e ha un maggiorante(ogni punto di E è ≤f(b)) perciò ricordando l'assioma di continuità della retta E ha sup. Affermo che f(x_0)=0 infatti se f(x_0)<0, evidentemente x_0. Inoltre per la permanenza del segno nell'intervallo destro di x_0 f(x) sarebbe negativa. Ci sarebbero punti di E>0 in contraddizione con la definizione di E. Se f(x_0)>0 allora non può essere x_0 = a e sempre per la permanenza del segno nell'intervallo sinistro]x_0-δ, x_0[di x_0 in cui f(x) sarebbe strettamente positiva dunque tutti i punti di E sarebbero < di x_0-δ (nuovo maggiorante) in contraddizione con la definizione di x_0, non resta che la soluzione f(x_0) = 0.
TEOREMA DI WEIERSTRASS – una funzione continua in [a,b] ammette massimo e minimo, inoltre se f(x) definita su tutto R tende a +∞ per x→±∞ sicuramente f ha minimo.
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI – sia f una funzione continua in un intervallo [a,b], essa assume tutti i valori tra il minimo e il massimo.

DERIVATA

CONCETTO DI DERIVATA – sia f una funzione definita in (a,b) con (x, x_0) ∈ (a,b), il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ rappresenta il tasso d'incremento della funzione nell'intervallo(x, x_0); al tendere di $x \to x_0$ si ha la "variazione istantanea" della funzione rispetto ad x o derivata prima di f rispetto ad x.
DERIVATA DI UNA FUNZIONE – è il limite, se esiste, per h→0del rapporto incrementale di $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
SIGNIFICATO GEOMETRICO – è il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto x_0.
EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE – se f(x) è derivabile in x_0 allora la retta di equazione y=f(x_0)+f'(x_0) * (x-x_0) si chiama retta tangente al grafico.
PROCEDURA DI SCOPPIAMENTO – se una funzione è derivabile in x_0, pensando di guardarla con un microscopio sempre più potente centrato in x_0 ci si accorge che la funzione tende a raddrizzarsi fino a diventare una retta non verticale y = mx.
DIFFERENZIALE – data una funzione f definita in [a,b] si dice differenziale di f nel punto x_0 il prodotto della derivata della funzione calcolata in quel punto per l'incremento della variabile x. Ovvero f '(x_0)*Δx.
FUNZIONE DIFFERENZIALE –è la funzione g(x) = f '(x_0) (x-x_0). Non ci si limita ad un Δx, ma si considera tutta la retta che ha come pendenza la derivata nel punto x_0.
FUNZIONE LINEARE APPROSSIMANTE –la retta che meglio approssima la funzione è la tangente.
DERIVATA DESTRA – è il limite del rapporto incrementale facendo tendere x→x0+ (semiretta tangente destra).
DERIVATA SINISTRA –è il limite del rapporto incrementale facendo tendere x→x0- (semiretta tangente sinistra).
CONTINUITA' E DERIVABILITA' – una funzione derivabile è anche continua, ma una funzione continua non è detto che sia derivabile (punti critici).
DERIVATA DELLA SOMMA – è uguale alla somma delle derivate.

DERIVATA DEL PRODOTTO –(dimostrazione) $\frac{f(x+h)*g(x+h)-f(x)*g(x)}{h}$ aggiungo e tolgo f(x)*g(x+h) e metto in evidenza una volta g(x+h) e f(x) dunque ottengo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}*g(x+h)+f(x)*\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ di qui ottengo la regola è D f*g = Df*g + f*Dg.

DERIVATA DEL QUOZIENTE –(dimostrazione) $\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$ svolgendo i calcoli $\frac{f(x+h)*g(x)-g(x+h)*f(x)}{g(x+h)*g(x)}$ aggiungo e tolgo f(x)*g(x) ottenendo

$$\frac{g(x)*\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)*\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)-g(x)}$$ da qui la regola è D f/g = (Df*g – f*Dg)/g^2

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA –la regola è D f(g(x)) = Df * Dg.

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA – sia f (a,b) continua e strettamente monotona derivabile in $x_0 \in$ (a,b) e f ’(x_0) ≠ 0 allora vale la regola $\frac{1}{f'*f^{-1}(x)}$. Si dimostra sapendo che l’intervallo generalizzato (c,d) dell’immagine della funzione, continuo anch’esso, ha rapporto incrementale finito per f(x)→f(x_0) (e ricordandosi che il grafico della funzione inversa è il grafico della funzione visto dall’asse delle ordinate.

PUNTI DI MASSIMO – un punto x_0 si dice di massimo se ∃ un intorno I tale che f(x) ≤ f(x_0) ∀ x ∈ I.

PUNTI DI MINIMO – un punto x_0 si dice di minimo se∃ un intorno I tale che f(x) ≥ f(x_0) ∀ x ∈ I.

PUNTI CRITICI – punti con tangente verticale o spigolosi.

TEOREMA DI FERMAT– sia f: (a,b)→R e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad (a,b), se f è derivabile in x_0 allora f ’(x_0) = 0. (dimostrazione) sia x_0 un massimo relativo interno: $x_0 \in$]a,b[ed ∃ δ>0 tale che se $|x-x_0| < \delta$ e x ∈ (a,b) allora f(x) ≤ f(x_0). Il rapporto incrementale è ≥ 0 per $x_0-\delta < x < x_0$ e ≤0 per $x_0 < x < x_0+\delta$ essendo f derivabile in x_0 si può mandare al limite il rapporto incrementale che per x→ x_0^+ è ≤ 0 e per x→ x_0^- è ≥ 0 dal teorema della permanenza del segno segue che f ’(x_0) = 0. (versione simile per x_0 minimo)

TEOREMA DI ROLLE –sia g continua in [a,b] derivabile in]a,b[inoltre g(a)=g(b) allora ∃ un punto ξ∈]a,b[tale che g ’(ξ) = 0. (dimostrazione) essendo g continua in [a,b] per il teorema di Weierstrass, essa ha sia massimo che minimo, se entrambi questi punti stanno sul borbo di [a,b] allora ovviamente g è costante ed ogni ξ ∈]a,b[va bene, se invece almeno uno dei due non sta sul bordo quindi è interno per il teorema di Fermat in questo punto la derivata 1° è = 0.

TEOREMA DI LAGRANGE – (del valore medio)sia f continua in [a,b] derivabile in]a,b[, ∃ un punto ξ appartenente]a,b] tale che f(ξ) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ovvero unendo i due punti del grafico di coordinate α=(a,f(a)) e β=(b,f(b)) ∃ un punto ξ in cui la derivata ha la stessa tangenza della retta ottenuta dalla congiunzione dei due punti.

REGOLE DI DE L’HOPITAL – si applicano alle forme indeterminate del tipo 0/0, ∞/∞; si deriva numeratore e denominatore fino a togliere l’indeterminazione.

FORMULA DEGLI ACCRESCIMENTI FINITI –

APPROSSIMAZIONE DI UNA FUNZIONE CON UN POLINOMIO – sia f(x) derivabile in (a,b) è possibile affermare che f(x) ≅ f(x_0)+f ’(x_0)*(x-x_0) dove con il simbolo ≅ si intende che la differenza tra il 1° e il 2° membro chiamata R_1(x) (resto di ordine 1), tende a 0 più rapidamente di (x-x_0) ovvero il $\lim_{x\to x_0}\frac{R_1(x)}{x-x_0}=0$.

FORMULA DI TAYLOR –sia f(x) derivabile n volte, la formula f(x) = $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ approssima la funzione nel punto x_0 con approssimazione di un infinitesimo di ordine n, si può dimostrare, supponendo che la derivata $f^n(x)$ sia continua in x_0 ricavando $R_n(x)$, che il limite per x→ x_0 presenta una forma indeterminata del tipo

$\frac{0}{0}$ e che applicando il teorema dell'Hopital n volte ci si riconduce a $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$ che è = 0 perché $f^{(n)}(x)$ è continua in x_0.

NUMERO E – Il numero **e** è dato dalla successione per n→+∞ di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ che è strettamente crescente e limitata dunque esiste il limite ed è reale (si può dimostrare che è irrazionale) detto anche numero di Nepero approssimato alle prime 10 cifre vale 2.7182818244 .

COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITA' –è la proporzione con cui cresce la funzione rispetto alla variazione della funzione in un intervallo. La funzione e^x cresce con tasso di proporzionalità pari a se stesso (uguale ad 1).

INTEGRALI

METODO DI ESAUSTIONE – per misurare l'area di un campo di perimetro A si fissano dei punti in A che approssimano il perimetro formando un poligono P, se i punti sono stati scelti con cura la differenza di AΔP è trascurabile e l'area di A viene assunta = a P in modo da ridursi a calcolare l'area di poligoni.

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN–sia f una funzione limitata in [a,b]→R, se ∀ ε >0 fissato a piacere ∃ una partizione di [a,b] abbastanza fine tale che la somma delle aree superiori - la somma delle aree inferiori è < di ε allora f si dice integrabile secondo Riemann. Il limite inferiore delle aree superioririsulta allora uguale al limite superiore delle aree inferiori ed è per definizione l'integrale di f secondo Riemann o integrale di f in [a,b].

CRITERIO D'INTEGRABILITA' – sia f una funzione reale e sia [a,b], a<b un intervallo contenuto nel suo dominio; sia inoltre f limitata in [a,b]. Allora f è integrabile su [a,b] se e solo se ∀ ε >0 ∃ suddivisione σ di [a,b] tale che se S(f,σ) – s(f,σ) < ε .

FUNZIONI CONTINUE MONOTONE – ogni funzione f (a,b) monotona è integrabile in [a,b].

FUNZIONI CONTINUE A TRATTI–sono integrabili se i tratti di discontinuità sono in numero finito e se sono limitate.

PRIMITIVE – un metodo per il calcolo degli integrali definiti è quello di conoscere una primitiva F di una funzione continua in [a,b] per cui poiché la primitiva è quella funzione che derivandola dà come risultato la funzione integranda, (deve essere derivabile nel punto di integrazione e nell'intervallo non derivabile per un numero finito di punti)

$\int_a^b f(t)dt$ = F(b)-F(a) ovvero $F(t)\big|_a^b$ (valutato tra a e b), dove F(t) è la primitiva di F(t).

PROPRIETA' DELL'INTEGRALE –se f(x) e g(x) sono due funzione integrabili in (a,b) allora: 1° - la somma e il prodotto delle due è integrabile, 2° - se $\frac{1}{g(x)}$ è limitata allora anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ è integrabile, 3° - |f(x)| è integrabile, 4° - max(f(x),g(x)) min(f(x),g(x)) sono integrabili, 5° - $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6°- $\left| \int f(x) \right| \le \int \left|f(x)\right|$, 7°- $\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x)$.

1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE –(valore medio o media integrale) se f:[a,b] è integrabile in [a,b] il numero $\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$ si chiama media integrale di f.

2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE –(relazione con la derivata) sia f integrabile in [a,b] e sia F(x):= $\int_a^x f(t)dt$, x∈ [a,b], la funzione integrale: 1° - se f è continua in x_0 ∈ [a,b], allora F è derivabile in x_0 e si ha F 'di x_0=f(x_0), 2° - se f è continua in [a,b] e se G(x) (x∈[a,b]) è una funzione derivabile con G'(x) = f(x) ∀ x ∈ [a,b] allora $\int_a^b f(x)dx$ = G(b)-G(a).

PROPRIETA' LIPSCHITZIANA – funzione che ha il rapporto incrementale limitato.

CRITERIO DI LIPSHITZIANITA' – se f è sia derivabile che limitata in [a,b] allora f è lipschitziana.

INTEGRAZIONE DIRETTA – quando è nota la primitiva della funzione integranda si calcola la primitiva tra i due estremi (nel caso vi siano) ottenendo immediatamente il risultato.

INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO – sia f (a,+∞)→R integrabile, allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx$;

quando la funzione f (a,+∞)→R non è integrabile o integrabile su (a,x) ∀ x>a ed entrambi gli integrali su (a,+∞) delle parti positive $f_+ e f_-$ sono infiniti, può accadere che esista finito il $\lim_{x\to+\infty} f(t)dt$ in tal caso si dice che f ha integrale improprio all'infinito. Si possono distinguere tre casi: 1° - funzioni limitate su un intervallo limitato, 2° - funzioni limitate su un intervallo illimitato, 3° - caso 1° + 2°.

CRITERIO DEL CONFRONTO PER INTEGRALI IMPROPRI – siano f(x) e g(x) continue in (a,b) con f(x)≤g(x), allora $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$, se la seconda è integrabile lo è anche la prima, se lo è la prima non è detto che lo sia anche la seconda.

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE –la regola di derivazione delle funzioni composte da luogo ad un importante formula : sia f continua in [a,b] con derivata continua si ha $\int f(x)dx = \int f(g(t)) * g'(t)dt$ occorre che g(t) sia invertibile e il risultato finale in funzione di x si ottiene sostituendo t = $g^{-1}(x)$ può non risultare necessario invertire g, per la derivata della composta avremmo $\frac{d}{dt} f(g(t))$ = F'(g(t))*g'(t) = f(g(t))*g'(t) pertanto l'integrale risulta F(g(t))+c. se x = g(t) la quantità dx = g'(t)dt (che è una funzione delle due variabili t,dt) si chiama differenziale della funzione g(t) e si indica con dx (nell'integrale definito gli estremi si ottengono differenziandoli rispetto al nuovo differenziale).

INTEGRAZIONE PER PARTI – se in un intervallo f,g sono due funzioni derivabili con derivata continua la regola di derivazione del prodotto di due funzioni da luogo ad un'altra formula: (f*g)'= f '(x)*g(x)+f(x)*g '(x), integrando su [a,b] e applicando il teorema fondamentale del calcolo si ha $\int_a^b [f'(x)\times g(x)]dx = f(x)\times g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) * g'(x)dx$ chiameremo g(x) il fattore finito e f(x) il differenziale(P.S.: è importante che la derivata sia continua).

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI –un rapporto tra un polinomio di grado m ed un altro di grado n si dice improprio quando m≥n e proprio quando m<n, nel caso tale frazione sia propri si risolve con questo metodo: 1° - scomposizione del polinomio in fattori, 2° - minimo comune multiplo, 3° - si risolve il sistema, 4° - si sostituisce i valori nell'integrale risolvendolo, nel caso in cui m≥n vale la regola $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}dx$ dove q ed r sono rispettivamente resto e quoziente della frazione.

DECOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI – 1°(3 radici): d(x)=$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \rightarrow \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{b}{x-\alpha_2} + \frac{c}{x-\alpha_3}$, 2°(2 radici(1 doppia)): d(x)= $x^2 * (x-\alpha_1) \rightarrow \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$, 3° d(x)= $(x-\alpha_1)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) \rightarrow \frac{a}{x-\alpha_1} + \frac{bx+c}{\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3}$.

CALCOLO DI CENTRI DI MASSA - si abbiano $(p_1, m_1), (p_2, m_2), (p_n, m_n)$, la formula: $(p_0 - 0) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i \times (p_i - 0)$ (oppure con $\overline{x_i} = coordinate\ di\ p_i$)segue $x_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i \times \overline{x_i}$ con 0 = origine scelta a piacere, serve per calcolare il centro di massa per un sistema discreto di n punti materiali. Nel continuo (preso ad esempio un corpo C) al posto della massa si usa una funzione di densità $\varsigma : C \rightarrow R^+$ per cui data una qualunque regione D ⊂ C la massa D è data da $\int_D \varsigma(x)dx$ e la massa totale del corpo (D≡C) è $m = \int_C \varsigma(x)dx$, il centro di massa vale (sostituendo la sommatoria con l'integrale e la massa con $\varsigma(x)dx$) $\overline{x_0} = \frac{1}{m}\int_C \varsigma(x)dx$

CALCOLO DEL MOMENTO D'INERZIA –(di un'asta rispetto ad un'asse)il momento dell'inerzia vale: I=$\sum m_i x_i^2$; la massa dell'asta è data dalla densità per la sua lunghezza $(m = \varsigma \times l)$dunque sempre sostituendo la somma con l'integrale si ha: $I_y = \int_{asta} x^2 dm$ per cui se la lunghezza dell'asta è l si ha $\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \varsigma \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12}\varsigma * l^3 = \frac{1}{12} ml^2$.